Mathematik

Der kleine Gauß hatte als neunjähriger Schüler die folgende Aufgabe seines Lehrers in ganz kurzer Zeit gelöst:

„Bitte bildet die Summe aller Zahlen von 1 bis 100“!

Der Lehrer wollte sich offenbar etwas Ruhe verschaffen und hoffte, dass seine Schüler für eine gewisse Zeit beschäftigt wären.

WIKIPEDIA schreibt dazu:

Diese Summenformel wie auch die Summenformel für die ersten n Quadratzahlen war bereits in der vorgriechischen Mathematik bekannt.

Carl Friedrich Gauß entdeckte diese Formel als neunjähriger Schüler wieder. Die Geschichte ist durch Wolfgang Sartorius von Waltershausen überliefert.

Was im Kopf des jungen Schülers tatsächlich vorging, ist nicht bekannt.

Er dachte vielleicht so:

Wenn ich mit Null beginne, könnte ich von 0 bis 49 immer zwei Zahlen addieren, deren Summe jeweils 100 ist. Am Ende zähle ich die verbleibende 50 dazu:

0 + 100, 1 +99, 2 + 98, … …49 + 51, + 50

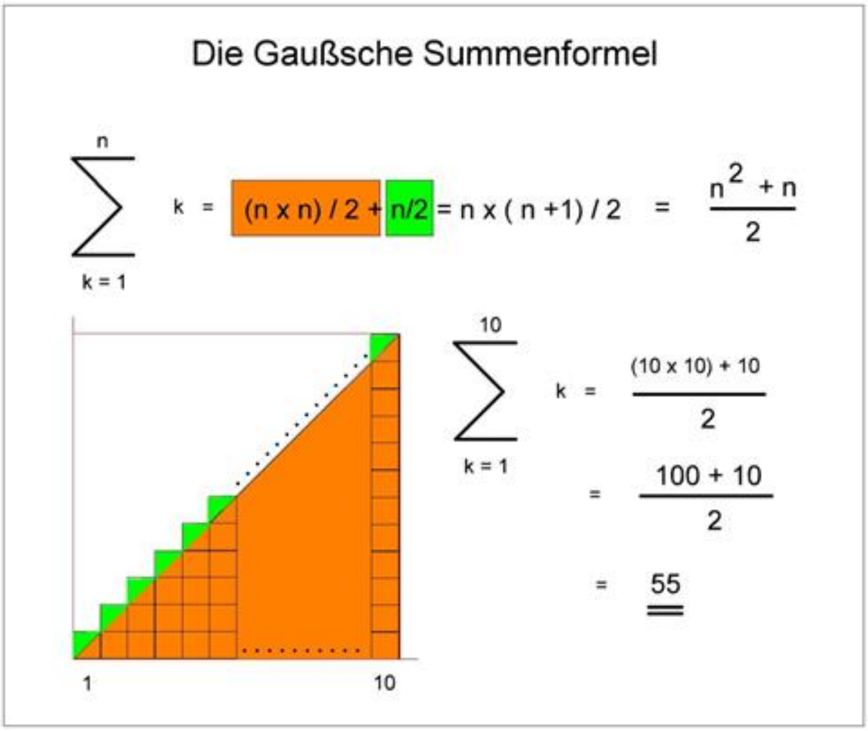
Das ergibt (50 x 100) + 50 = 5050

Mathematiker brauchen immer eine Verallgemeinerung ihrer Behauptung und schreiben diese als Formel:

Die größte Zahl nennen wir n. Und wenn man im Falle von n = 100 50(n/2) Paare bilden kann, die jeweils addiert 100 (n) ergeben, dann kann man auch sagen, dass die Menge dieser Paare zusammen n(n/2) ist: Hier also 100 x 50 = 5000. Bei dieser Betrachtung bleibt dann die 50 als letzte Zahl einsam übrig. Mit ihr kann man kein Paar mehr bilden, weil sie ja nicht zweimal addiert werden darf. Und somit zählen wir sie einfach dazu. Das Ergebnis ist dann 5050. Und wir können das auch in einer Formel ausdrücken:

Summe = n x (n/2) + (n/2) = (n x (n + 1)) / 2; 100 x (101) / 2 = 10100 : 2 = 5 050.

Es könnte aber auch sein, dass er die Lösung über eine geometrische Konstruktion fand. Ich habe mal versucht, diesen Denkvorgang anschaulich nachzubilden. Dazu reicht es ja aus, das Prinzip anhand eines Beispiels mit nur zehn Zahlen zu erläutern:



Zunächst kann man sich die Zahlen als Säulen kleiner Quadrate mit der Fläche 1 vorstellen. Dann wäre die Gesamtfläche die Addition aller Säulen, also ihrer Flächen. Bildet man ein Quadrat mit der Zahl n, dann ist die Fläche doppelt so groß. Also teilt man sie durch 2. Aber da fehlen dann noch die kleinen grünen Dreiecke. Ihre Gesamtfläche ist also die Hälfte eines Quadrates mal ihrer Anzahl. Diese Fläche muss man nun zur Hälfte des großen Quadrats addieren.

Hier ist die Summe: 55

Gauß hatte für n = 100 k = 5 050 als Ergebnis berechnet.

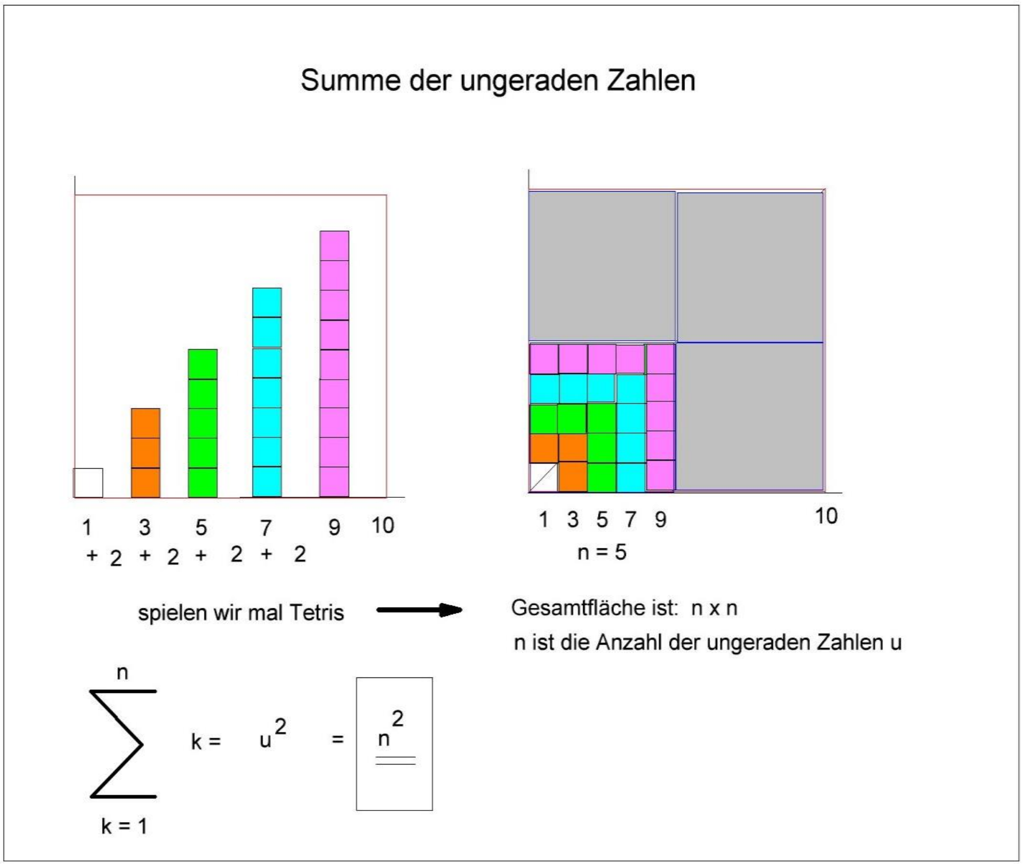
Eigentlich ganz einfach, oder?

Und wenn man die Dinge so begreift, macht Mathe auch wieder Spaß…

…und weil das mit einer Grafik einfacher zu verstehen ist, wollen wir gleich noch die Summenbildung der ungeraden zahlen studieren:

Wir sehen im folgenden Bild links die Säulen als Flächenteile, die wir zusammenschieben. Wie beim Tetris erhalten wir ein Quadrat mit der Seitenlänge u. u^2 also ergibt die Gesamtfläche und somit die Summe der ungeraden Zahlen. In unserem Beispiel mit n = 5 sind das 25.

Für n = 6 (Menge 1 bis 11) ist die Summe 36. Und letztlich für die Menge 100 käme 2500 als Ergebnis heraus, weil wir 50 ungerade Zahlen zählen.



DF8ZR; im November 2014